

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. SERRA

SISTEMI IPERBOLICI NON SIMMETRIZZABILI:
PROBLEMA DI CAUCHY

8 MARZO 1984

Consideriamo il Problema di Cauchy non caratteristico per sistemi pseudodifferenziali del 1° ordine iperbolici. E' noto che per tali operatori il problema di Cauchy è in generale mal posto in C^∞ , a meno che il sistema sia simmetrizzabile (in particolare strettamente iperbolico).

L'iperbolicità, nel caso dei coefficienti variabili, caratterizza la varietà caratteristica, ma è condizione solo necessaria (Teorema Lax-Mizohata) affinché il problema di Cauchy sia ben posto in C^∞ , se i dati sono C^∞ (diversamente dal caso analitico e iperfunzioni [3], [12]).

In generale si devono dare condizioni non solo sul simbolo principale, ma anche sui termini di ordine più basso: anche per i sistemi a coefficienti costanti, del resto, la condizione necessaria e sufficiente in C^∞ è la iperbolicità (Garding [7]), che, in questo caso è condizione anche sui termini di ordine inferiore.

Tranne il caso a coefficienti costanti (equazioni e sistemi) non si ha una caratterizzazione degli operatori per i quali il (C.P.) è ben posto (esistenza e unicità): i risultati sono parziali e non si riferiscono che a casi particolari (per la molteplicità costante condizione Levi).

Molti autori hanno studiato sistemi la cui parte principale è diagonalizzabile: per una bibliografia esauriente si rimanda a Hörmander [9], Kumano-go [13], Petkov [16], [17].

Per sistemi la cui parte principale non è diagonalizzabile si hanno risultati in casi particolari soltanto.

Consideriamo sistemi il cui simbolo principale non è diagonalizzabile, ma a caratteristiche di molteplicità costante: supponendo verificata una condizione tipo Levi si costruisce una parametrix del

(C.P.) in forma di operatore integrale di Fourier.

Il vantaggio di questo metodo rispetto alle tecniche di stime a priori (disuguaglianza d'energia [20]) è che permette di scrivere in forma "esplicita" la soluzione e di precisare quindi il suo comporta-mento in C^∞ , ma anche negli spazi di Sobolev e di ottenere risultati glo-bali per la propagazione e la riflessione delle singolarità.

Questa idea, ormai "classica", di risolvere il (C.P.) è do-vuta a J. Chazarain [4] che l'ha introdotta nel caso di una sola equazio-ne: per i sistemi sorgono tuttavia difficoltà nuove, proprie dei sistemi stessi.

Le notazioni usate sono quelle di Hörmander [8]:

Sia X' una varietà C^∞ compatta, di dimensione n , sia $X = R \times X'$, $x = (x_0, x')$ la variabile in X e $(x_0, x'; \xi_0, \xi') \in T^*X$.

Si nota $C^\infty = C^\infty(X)$ il fibrato delle densità di ordine $\frac{1}{2}$ su X . Gli operatori pseudodifferenziali considerati ammettono sviluppo in simbo-li omogenei (classici) e noteremo q il simbolo principale di un operatore Q .

Sia dato l'operatore P :

$$(1.1) \quad P(x, D) = D_{x_0} - A(x_0, x'; D_{x'})$$

ove A è una matrice $R \times R$ di operatori pseudodifferenziali in X' , regola-ri in x_0 , $A = (A_i^j)$ $A_i^j \in C^\infty(R, L^1(X'))$ $i, j = 1, \dots, R$.

Non è troppo restrittivo considerare sistemi del tipo (1.1), perché qui non si richiede la diagonalizzabilità del simbolo principale, e questo permette di ridurre alla forma (1.1) operatori (diff in x_0 e pseudodiff in x') del tipo:

$$(1.2) \quad L = D_{x_0}^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-j}(x_0, x', D_{x'}) D_{x_0}^j \left[A_{m-j} \in C^\infty(R \times L^{m-j}(X')) \right]$$

ma anche sistemi (diff in x_0 e pdo in x').

$$(1.3) \quad D_{x_0}^{m_j} \delta_i^j + \sum_{k=0}^{m_j-1} A_{i,m_j-k}^j(x_0, x', D_{x'}) D_{x_0}^k \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$A_{i,m_j-k}^j \in C^\infty(R \times L^{m_j-k}(x'))$$

Infatti il sistema (1.3) si scrive:

$$(1.4) \quad D_{x_0}^{m_i} v_i + \sum_j \sum_{k \leq m_j-1} A_{i,m_j-k}^j(x_0, x', D_{x'}) D_{x_0}^k v_j = f_i$$

e con la sostituzione:

$$u_{m_i(i-1)+k} = D_{x_0}^{k-1} \Lambda^{m_i-k} v_i \quad 1 \leq k \leq m_i,$$

ove Λ è un operatore pseudodiff. di simbolo $|\xi'|$, il sistema (1.4) si riduce alla forma (1.1) con $R = \sum_i m_i$ e, che è importante, il polinomio caratteristico del simbolo principale (polinomio in ξ_0) rimane lo stesso.

Supponiamo che P sia un sistema iperbolico di molteplicità costante, cioè P verifica la condizione seguente:

$$(H) \quad \det p = \prod_{\alpha=1}^{\ell} q_{\alpha}^{r_{\alpha}} \quad , \quad q_{\alpha}(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_{\alpha}(x, \xi')$$

ove λ_{α} sono funzioni C^∞ a valori reali e $\lambda_{\alpha}(x, \xi') \neq \lambda_{\beta}(x, \xi')$
 $\forall (x, \xi'), \forall \alpha \neq \beta$, r_{α} sono interi ≥ 1 con $\sum_{\alpha} r_{\alpha} = R$

Il problema di Cauchy (globale) si formula allora come segue:
 data $f \in C^\infty(X)$, $g \in C^\infty(X')$ determinare $u \in C^\infty(X)$:

$$(C.P.) \quad Pu = f \quad u|_{t_0} = g$$

Se $r_\alpha = 1 \forall \alpha$, l'operatore P è strettamente iperbolico e quindi simmetrizzabile (\exists cioè una matrice hermitiana r_0 , $r_0 \geq c I$ $c > 0$ tale che $r_0 p$ è hermitiana): com'è noto il (C.P.) è ben posto per i sistemi simmetrizzabili. Ma se la molteplicità r_α è > 1 assume un ruolo importante il nucleo $\text{Ker } p(x, \lambda_\alpha(x, \xi'), \xi')$; in particolare se $\dim \text{Ker } p(x, \lambda_\alpha, \xi') = r_\alpha \forall \alpha$ (p si diagonalizza) si può costruire una parametrix per il (C.P.) senza aggiungere condizioni (Demay [5]).

Se invece $\dim \text{Ker } p(x, \lambda_\alpha(x, \xi'), \xi') = 1 \forall \alpha$ e l'operatore è differenziale si ha una condizione necess. e suff. [10] affinché il (C.P.) sia ben posto "localmente" ma questo caso, con qualche accorgimento [18], [1], si può ricondurre a quello di una sola equazione e si può provare che allora la condizione posta equivale alla condizione di Levi scalare.

Se poi $\dim \text{ker } p(x; \lambda_\alpha(x, \xi'), \xi')$ è localmente costante e di più vale 1 o $r_\alpha = 1 \forall \alpha$ si ha una condizione sufficiente - di tipo Levi - [17] che permette di costruire una parametrix per (C.P.). Altri risultati si riferiscono ai casi $r_\alpha = 2$ o $r_\alpha = 3$ rispettivamente.

L'idea di semplificare il problema riducendo il simbolo principale (non diagonalizzabile) alla sua forma normale di Jordan non si rivela opportuna che in alcuni casi particolari [10], [18] perché sia la forma normale che l'operatore di riduzione dipendono con discontinuità dalla matrice originale: il problema di trovare una "forma normale" (più semplice possibile) a cui ridurre una famiglia di matrici per mezzo di una trasformazione regolare è risolto per ora solo nel caso olomorfo [1].

Si è cercata allora una condizione che sia una estensione "naturale" della condizione di Levi classica (scalare) che è necessaria, sufficiente, invariante per trasformazioni canoniche.

E' ben noto che essa equivale, nel caso scalare, alla condizione di decomponibilità, secondo la seguente definizione:

Def. (L): un operatore P a molteplicità costante, $p = \prod_{\alpha} q_{\alpha}^{r_{\alpha}}$ è decomponibile rispetto q_{β} se

$$(L) \quad P = \sum_{j=0}^{r_{\beta}} B_j Q_{\beta}^j$$

ove $B_j \in L^{R-r_{\beta}}(X)$ e Q_{β} ha simbolo (principale) q_{β} .

Nel caso di un sistema si introduce dapprima la definizione di sistema cofattore:

Def.: T è un sistema cofattore di P se il simbolo principale di T è co_p , matrice dei cofattori di p .

Se P è un sistema (H), PT e TP sono sistemi iperbolici con simbolo principale diagonale di molteplicità costante.

La definizione di decomponibilità è la seguente:

Def. L_1 : un sistema P a molteplicità costante, ($\det p = \prod_{\alpha} q_{\alpha}^{r_{\alpha}}$) è decomponibile rispetto $q_{\beta} \quad \forall \beta$ se \exists un sistema cofattore T tale che:

$$(L_1) \quad PT = \sum_{j=0}^{r_{\beta}} B_j Q_{\beta}^j$$

ove Q_{β} ha simbolo (princ) q_{β} e $B_j = (B_{j,s}^t)$, $B_{j,s}^t \in L^{R-r_{\beta}}(X)$, $R = \sum_{\alpha} r_{\alpha}$

Supposta verificata la (L_1) , spesso citata come condizione di Levi per la sua analogia con il caso scalare, Demay [5] ha dato la costruzione di una parametrix se $r_{\alpha} \leq 2 \quad \forall \alpha$, Berzin-Vaillant [2] per il caso differenziale.

La (L_1) però non è condizione necessaria, di essa si può da

re la seguente estensione:

Def. (L_2) un sistema P a molteplicità costante verifica la condizione (L_2) se \exists un sistema cofattore T , tale che: $\forall \beta, \forall (s,t) \exists$ interi n_t^β, n_s^β tali che:

$$(L_2) \quad (PT)_t^s = \sum_{j \geq 0} B_{t,j}^s Q_\beta^j \quad ,$$

ove $B_{t,j}^t \in L^{R-r_\beta} \cdot 0 \leq j \leq r_\beta$, mentre se $s \neq t$

$$B_{t,j}^s \in L^{R-r_\beta + n_t^\beta - n_s^\beta} \quad 0 \leq j \leq r_\beta - 1 - (n_t^\beta - n_s^\beta)$$

Gli operatori $B_{t,j}^s$ cambiano con β , ma è importante che $B_{t,r}^t$ ha simbolo principale $\pi_\beta = \prod_{\alpha \neq \beta} q_\alpha^{r_\alpha}$.

Se $n_t = n_s \quad \forall (s,t)$ la (L_2) si riduce alla (L_1) . Questa condizione è introdotta da Kajitani [10] nel caso differenziale a parte principale diagonale ed è, in certo senso, suggerita da Leray-Ohya [21] e da Volevic [22].

Osservazione. *Condizioni di Levi* equivalenti: la formulazione (L) per la condizione di Levi è forse la più "evidente". Limitandosi, per semplicità, al caso scalare, ricordiamo la formulazione di Mizohata-Ohya data mediante l'annullarsi, sulla varietà caratteristica, dei simboli (invarianti), la definizione di Flashka-Strang, la più nota, forse: sia $P \in L^R(X)$:

(Lf) $\forall \alpha, x^0 \in X, \forall \phi$ funz. caratteristica di molteplicità r_α
 in x^0 ($q_\alpha(x, \phi'_x) = 0$, $\phi'_x(x^0) \neq 0$) si ha

$$e^{-i\rho\phi} P(a e^{i\rho\phi}) = 0 \quad (\rho^{R-r_\alpha}) \quad \rho \gg \gg$$

$$\forall a \in C_0^\infty(X) \quad \phi'_x \neq 0 \text{ su } \text{supp } a$$

oppure l'equivalente di Chazarain [4]

(Lc) $\forall \alpha, \forall x^0 \in X$ e ϕ , funz. caratteristica di molteplicità r_α in x_0

$$e^{-i\phi} P(a e^{i\phi}) \in S^{R+1-r_\alpha}(X)$$

$$\forall a \in S^1(X) \text{ e } \phi'_x \neq 0 \text{ su } \text{conesupp } a$$

L'estensione al caso sistema di queste osservazioni si fa in modo "naturale".

Supposta verificata la (L_2) si ha il seguente:

Teorema. Sia P il sistema iperbolico (1.1) e verifichi (H) e (L_2) , allora \exists una relazione canonica C_{t_0} e un operatore integrale di Fourier $K_{t_0} \in I^{m-1-1/4}(X, X', C_{t_0})$ tali che: $P \cdot K_{t_0} = 0 \quad K_{t_0}|_{t_0} = \text{Id.}$

$$m = \max_{\alpha} m_{\alpha}, \quad m_{\alpha} = \max_{s,t} r_{\alpha} + n_t^{\alpha} - n_s^{\alpha}$$

2. COSTRUZIONE DEL NUCLEO DEL PROBLEMA DI CAUCHY

La costruzione dell'operatore K_t è, nelle linee essenziali, la stessa, ormai classica, del caso scalare: così ci si limita a sottolineare quanto di nuovo interviene per il caso dei sistemi.

La definizione della relazione canonica C_t è classica: dalla fattorizzazione $\det p = \prod_{\alpha} q_{\alpha}^r$, $q_{\alpha}(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_{\alpha}^0(x, \xi')$ si associa a q_{α} la relazione bicaratteristica C_{α}

$$C_{\alpha} = \{(\bar{x}, \xi; y, \eta) \in N_{\alpha} \times N_{\alpha} : (x, \xi) \text{ e } (y, \eta) \text{ appartengono alla stessa biracatt}\}$$

$$N_{\alpha} = q_{\alpha}^{-1}(0) \subset T^*X_0$$

Per composizione con l'operatore di restrizione su $X_{t_0} = \{x; x_0 = t_0\}$, si definisce la relazione canonica $C_{t_0} = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha t_0}$

ove

$$C_{\alpha t_0} = \{(x, \xi; y', \eta') : (x, \xi) \text{ appartiene alla bicaratteristica di } q_{\alpha} \text{ uscente da } (t_0, y'; \lambda_{\alpha}(t_0, y', \eta'), \eta')\}.$$

E' opportuno disporre di una carta locale per $C_{\alpha t_0}$ ottenuta mediante una funzione di fase ϕ :

Proposizione. Sia ϕ la soluzione (in un intorno conico Γ di un punto (x^0, η'^0)) dell'equazione $q_{\alpha}(x, \phi'_x) = 0$, $\phi/t_0 = \langle x', \eta' \rangle$, allora localmente $C_{\alpha t_0}$ è immagine del diffeomorfismo locale:

$$(x, \eta') \longrightarrow (x, \phi'_x, \phi'_{\eta'}, \eta')$$

Definita la fase $\Phi: \Phi(x, y', \eta') = \phi(x, \eta') - \langle y', \eta' \rangle$, $C_{\alpha t_0}$ è localmente della forma $\Lambda_{\Phi} = \{x, \phi'_x, y', \phi'_{y'}\}$ per $(x, y', \eta'): \phi'_{\eta'}(x, y', \eta') = 0$.

Costruzione di $K_{t_0} \in I^{m-1-1/4}(X, X', C_{t_0})$

Cerchiamo $K_{t_0} = \sum_{\alpha} K_{\alpha t_0}$, $K_{\alpha t_0} \in I^{m_{\alpha}-1-1/4}(X, X', C_{\alpha t_0})$

$$m_{\alpha} = \max_{l,s} (r_{\alpha} + n_s^{\alpha} - n_l^{\alpha})$$

della forma $K_{\alpha t_0} = T E_{\alpha t_0}$, con $E_{\alpha t_0}$ soluzione di

$$(2.1) \quad PT E_{\alpha t_0} = 0, \quad T E_{\alpha t_0}|_{t_0} = I_{\alpha}$$

ove $Id = \sum_{\alpha} I_{\alpha}$.

Proposizione. Con le notazioni precedenti si ha:

$$(2.2) \quad Id = \sum_{\alpha} \frac{1}{(r_{\alpha}-1)!} d_{\xi_0}^{r_{\alpha}-1} \left(\frac{1}{\Pi_{\alpha}} \text{co}_p(x; \xi) \right) \Big|_{\xi_0 = \lambda_{\alpha}(x, \xi')}$$

Dimostrazione. Si scrive, per il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} Id &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (zI - a(x, \xi'))^{-1} dz = \sum_{\alpha} \text{Res} \left(\frac{\text{co}_p}{\det p}, \lambda_{\alpha} \right) = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{(r_{\alpha}-1)!} d_{\xi_0}^{r_{\alpha}-1} \left(\frac{\text{co}_p}{\Pi_{\alpha}} \right) \Big|_{z = \lambda_{\alpha}(x, \xi')} \end{aligned}$$

ove γ è curva chiusa di indice 1 rispetto $z_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(x, \xi')$, $\forall \alpha$.

Da questa decomposizione segue che, per ricostruire l'identità $Id = \sum_{\alpha} I_{\alpha}$ ove

$$I_{\alpha} = \sum_{h=0}^{r_{\alpha}-1} \frac{1}{h!(r_{\alpha}-1-h)!} d_{\xi_0}^{r_{\alpha}-1-h} \frac{1}{\Pi_{\alpha}} \cdot d_{\xi_0}^h \text{co}_p \Big|_{\xi_0} = \lambda_{\alpha}$$

e questa è la differenza più significativa rispetto al caso scalare e diagonalizzabile.

Equazioni di trasporto: è sufficiente costruire $E_{\alpha t_0}$, soluzione di (2.1) $\forall \alpha$: si determina come sviluppo asintotico i cui termini sono soluzioni delle equazioni di trasporto: la condizione Levi implica che le equazioni di trasporto si riducono a equazioni diff. ordinarie lungo le bicaratteristiche, di grado $r_{\alpha}^{(*)}$ (molteplicità della bicaratt. $C_{\alpha t_0}$).

Se $H_{q\alpha}$ denota, per semplicità, il campo Hamiltoniano e la corrispondente derivata (di Lie) si ha la seguente:

Proposizione: sia $A = (A_1^S)$ $A_1^S \in I_1^{n_1^{\alpha} - n_s^{\alpha} - R + r_{\alpha} - \frac{1}{4}} (X, X', C_{\alpha t_0})$

se P verifica (L_2) si ha

$$(PTA)_t^S \in I_t^{n_t^{\alpha} - n_s^{\alpha} - \frac{1}{4}} (X, X', C_{\alpha t_0})$$

e il suo simbolo principale è dato da:

$$(2.3) \quad \tilde{\Pi}_{\alpha}^{r_{\alpha}} H_{q_{\alpha}}^{\alpha} \tilde{a}_t^S + \sum_1 (c_{1t}^1 H_{q_{\alpha}}^{\alpha-1} + \dots + c_{rt}^1) \tilde{a}_1^S$$

ove a_1^S è simbolo principale di A_1^S e \sim è la composizione con la proiezione $C_{\alpha t_0} \rightarrow T^*(X)$.

(*) Si è supposto qui, per semplificare, che in (L_2) sia, per $n_t - n_1 < 0$, $B_{t,j}^1 \in L^{R-r+n_t-n_1-1}$ per $r \leq j \leq r-(n_t-n_1)$.

Notato H il sistema (H_t^1) ove

$$(2.4) \quad H_t^1 = \gamma_\alpha H_q^\alpha \delta_t^1 + c_{1t}^1 H_q^{\alpha-1} + \dots$$

$$H = \sum_\alpha H_q^\alpha I_\alpha + \text{termini di ordine più basso}$$

così H è un sistema diff ordinario di ordine r_α (lungo la bicaratt $C_{\alpha t_0}$),
non caratt a $x_0 = t_0$.

Costruzione di $E_{\alpha t_0}$ (supponiamo α fissato e lo depenniamo nel
seguito per semplicità di notazioni).

Determiniamo lo sviluppo asintotico

$$E_{t_0} = E_0 + E_1 + \dots \quad \text{ove } E_0 = (A_1^S)$$

$A_1^S \in I^{r-R+n_1-n_s-\frac{1}{4}}(X, X', C_{\alpha t_0})$. I simboli principali $a_1^S \in S^{r-R+n_1-n_s}(X)$

sono soluzioni del seguente problema di Cauchy ordinario:

$$\begin{cases} H(a_0) = 0 \\ d_{x_0}^h(a_0)|_{t_0} = 0, \quad h \leq r-2 \\ d_{x_0}^{r-1}(a_0)|_{t_0} = \frac{1}{\Pi_\alpha}|_{t_0} \cdot I \end{cases}$$

qui $a_0 = (a_1^S)$ e l'ultima condizione rispetta l'omogeneità.

Segue allora:

$$PTE_0 \in I^{m_\alpha - r_\alpha - 1 - \frac{1}{4}}(X, X', C_{\alpha t_0}) \quad m_\alpha = \max_{l,s} (r_\alpha + n_l^\alpha - n_s^\alpha)$$

e il simbolo principale di

$TE_0|_{t_0}$ è dato da $\frac{1}{\Pi_\alpha} d_{\xi_0}^{r-1} \text{cop}|_{t_0}$ poiché:

$$\mathbb{P}(e^{i\phi_\alpha} a_0)|_{t_0} = \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{\Pi_\alpha} d_{\xi_0}^{r-1} \text{cop}|_{t_0} + r_0 \quad r_0 = (r_{01}^S) \quad r_0^S \in S^{n_1-n_S-1}$$

Costruiamo $E_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_r$

ove $A_h = (A_{h1}^S)$, $A_{h1}^S \in I^{n_1 - n_S - R+r-h-1/4}$

e il suo simbolo principale $a_h = (a_{h1}^S)$ è soluzione del seguente Problema di Cauchy ordinario:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(a_h) = -f_h \\ d_{x_0}^j a_h|_{t_0} = 0 \quad 0 \leq j < r-1-h \\ d_{x_0}^{r-1-h} a_h|_{t_0} = (r_h-1) d_{\xi_0}^h \frac{1}{\Pi_\alpha} |_{t_0} \cdot I \\ d_{x_0}^{r-h} a_h|_{t_0} = \binom{r-1}{h-1} d_{\xi_0}^{h-1} \frac{1}{\Pi_\alpha} |_{t_0} \cdot r_0 \end{array} \right.$$

ove f_h è la matrice simbolo il cui termine $(1,s)$ è il simbolo principale di $(PT(E_0 + A_1 + \dots + A_{h-1}))_1^S$ che appartiene a $S^{n_1-n_S+r-h}$, segue quindi:

$PT(E_0 + E_1) \in I^{m_\alpha - r - \frac{1}{4}}$ e $T(E_0 + E_1)|_{t_0}$ ha simbolo principale $I_\alpha + s_0$, $s_0 \in S^{m_\alpha - r - 2}$.

Allo stesso modo si costruisce $E_l = B_1 + \dots + B_r$, $l \geq 2$ e il risultato segue per induzione.

VI-15.

La parametrisazione data nel teorema permette, metodo ormai standard, di costruire la soluzione del problema di Cauchy.

Per provare l'unicità basta imporre la condizione (L_2) anche per un sistema cofattore "a sinistra".

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arnold V., Matricies depending on parameters. Uspehi math nauk 26, 101-114, 1971.
- [2] Berzin-Vaillant. Parametrix du problème de Cauchy pour un système... C.R.A.S. t 283, 1976.
- [3] Bony-Shapira. Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy. Lecture Notes Math. Springer 287, 1973.
- [4] Chazarain . Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constant. Ann. Fourier 24, 1974.
- [5] Demay. Parametrix pour des systèmes hyperboliques... multiplicité const. J. Math. Pur Appl. 56, 1977.
- [6] Duistermaat-Hörmander. Fourier Integral Operators. Acta Math. 128, 1972.
- [7] Garding . Linear hyperbolic PDE constant coefficients. Acta Math. 85, 1950.
- [8] Hörmander. Fourier Integral Operators. Acta Math. 121, 1971.
- [9] Hörmander. Cauchy problem for diff. eq. double characteristics. J. Analyse Math. 32, 1977.

- [10] Kajitani. Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic systems. RIMS 5, 1979.
- [11] Kajitani. Cauchy problem... Leray Volevic systems. J. Math. Kyoto 22, 1982.
- [12] Kashiwara-Shapira. Micro-hyperbolic systems. Acta Math. 142, 1979.
- [13] Kuranogō Taniguchi. FIO of Multiphase and Fundamental Solution for Hyperbolic System. Funkcialaj Ekvacioj 22, 1979.
- [14] Mizohata. n kowalewskian Systems. Russian Math Surveys 29, 1975.
- [15] Mizohata. On the hyperbolicity in ... real analytic functions and Gevrey. Hokkaido Math. J. 12, 1983.
- [16] Petkov-Ivrii. Necessary conditions for the Cauchy Problem... Uspehi-MatNauk 29, 1974.
- [17] Petkov. Parametrix of the Cauchy Problem... Trudy Mosca 37, 1978.
- [18] Petkov. Microlocal Form for Hyperbolic Systems. Math Nachr. 93, 1979.
- [19] Serra. Parametrix for non symm hyperbolic systems... preprint.
- [20] Yoshida. Energy inequalities and finite propagation speed... Prac. Japan Acad. 50, 1974.

[21] Leray-Ohya. Systèmes lineair hyperholiques nonstricts. C.N.R.B.
Liege, 1964.

[22] Volevic L.R. On general systems of diff. eq. Soviet Math. Dokl.
1, 1960.